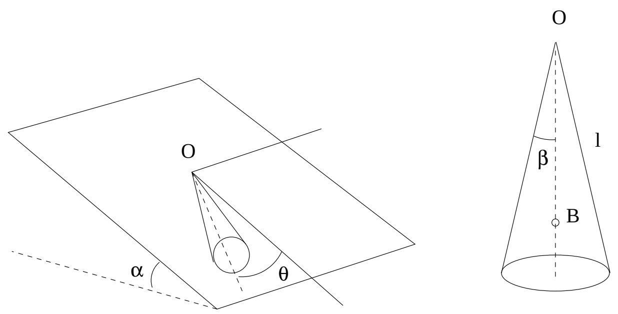
Compito di Meccanica Razionale e Analitica
5 Giugno 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da un cono pieno e omogeneo di massa M, semi–apertura β e lunghezza di una generatrice ℓ, vincolato a rotolare senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α rispetto ad un piano orizzontale. Usando come parametro lagrangiano l'angolo θ che la generatrice del cono a contatto con il piano forma con la direzione di massima pendenza,



a) determinare la direzione della velocità angolare del cono e calcolarne la norma;

b) calcolare l'energia potenziale della forza di gravità sapendo che il baricentro B del cono si trova sull'asse di simmetria, ad un'altezza dalla base che è $1/4$ della sua altezza totale;

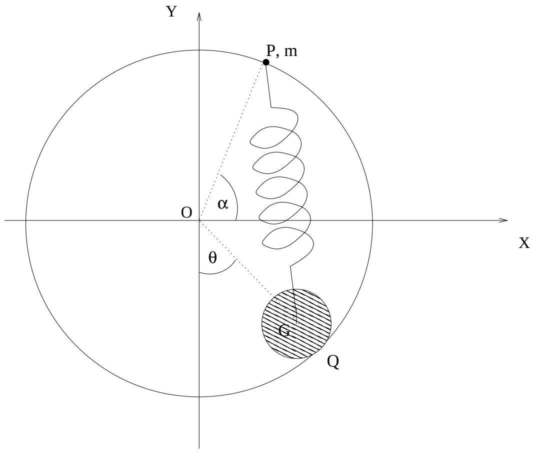
c) calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al vertice del cono O;

d) scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione di Lagrange.

Secondo Esercizio

Una guida circolare di massa trascurabile e raggio R, con centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali $OXYZ$, è vincolata a rimanere nel piano verticale XY e ruota in senso antiorario attorno all'asse Z; sulla guida è saldato un punto P di massa m. All'interno della guida può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio r ($2r < R$), il cui baricentro G è collegato al punto P attraverso una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

a) Usando come parametri lagrangiani l'angolo α che il segmento $\overline{OP}$ forma con l'asse X e l'angolo θ che il segmento $\overline{OG}$ forma con l'asse Y (vedi figura) scrivere la lagrangiana del sistema.



Assumiamo adesso che $\frac{R}{r} = 4$ e $\frac{mg}{kR} = 1$.

b) Mostrare che le configurazioni

$$(\alpha_1, \theta_1) = (\frac{\pi}{2}, 0)\,, \quad (\alpha_2, \theta_2) = (\frac{\pi}{2}, \pi)\,,$$
$$(\alpha_3, \theta_3) = (\frac{3}{2}\,\pi, 0)\,, \qquad (\alpha_4, \theta_4) = (\frac{3}{2}\,\pi, \pi)$$

sono di equilibrio e studiarne la stabilità;

c) scrivere l'equazione di secondo grado per il calcolo delle frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.