Compito di Meccanica Razionale e Analitica
9 Febbraio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse z verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie liscia Σ, descritta dai parametri $\theta, \phi \in S^1$ come segue:

$$x = (r\cos\theta + R)\cos\phi\,, \qquad y = (r\cos\theta + R)\sin\phi\,, \qquad z = r\sin\theta\,,$$

con R, r costanti positive, $R > r$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g.

a) Scrivere la lagrangiana L del sistema;

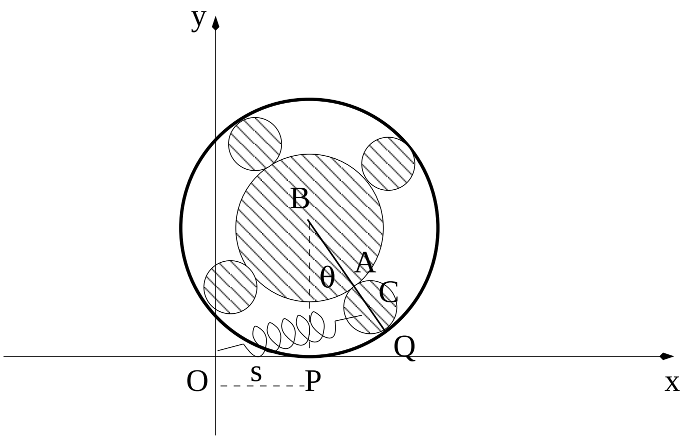
b) per ogni valore c dell'integrale primo corrispondente alla variabile ciclica in L scrivere la lagrangiana ridotta L_c^R con il metodo di Routh;

c) dimostrare che esistono 2 orbite periodiche con traiettoria circolare su Σ e valori costanti di $\theta = \theta_1, \theta_2$, con $\theta_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \theta_2 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$;

d) dimostrare che, per ogni valore $c \neq 0$ dell'integrale primo, esistono moti che si avvolgono spiraleggiando sulla superficie, cioè esiste una costante $\kappa > 0$ tale che $|\dot\phi|, |\dot\theta| \geq \kappa$.

Secondo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico piano formato da un anello di raggio R e massa M, un disco di raggio r e massa m e quattro dischetti di uguali raggi ρ e masse μ. Tali corpi sono omogenei e vale la relazione $R = r + 2\rho$. L'anello rotola senza strisciare su una guida orizzontale coincidente con l'asse x di un sistema di riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. All'interno dell'anello si muovono il disco ed i quattro dischetti: il disco è vincolato a mantenere il suo baricentro B in corrispondenza del baricentro dell'anello tramite i quattro dischetti, disposti in modo tale che i loro centri siano i vertici di un quadrato (vedi figura). I corpi a contatto rotolano gli uni sugli altri senza strisciare. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g, ed una forza elastica di costante $k > 0$ prodotta da una molla che collega l'origine del sistema di riferimento O al centro C di uno dei dischetti. Usando



come coordinate lagrangiane l'ascissa s del baricentro B e l'angolo θ che BC forma con la direzione verticale

a) trovare le velocità angolari dell'anello, del disco e dei dischetti;

b) scrivere la lagrangiana del sistema;

c) trovare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

d) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.