Compito di Meccanica Razionale e Analitica
9 Luglio 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Una particella di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali con energia potenziale
$$V(r) = \alpha\, r^{-2}\, e^{-f(\beta)\, r} \ ,$$
dove $\alpha > 0, \beta \in \mathbf{R}$, $f(\beta) = \beta^3 - 3\,\beta + 2$ ed r è la distanza della particella dal centro di forze.

1. Scrivere le equazioni di moto della particella utilizzando il formalismo lagrangiano e ridurre al problema unidimensionale esplicitando l'energia potenziale efficace V_e.

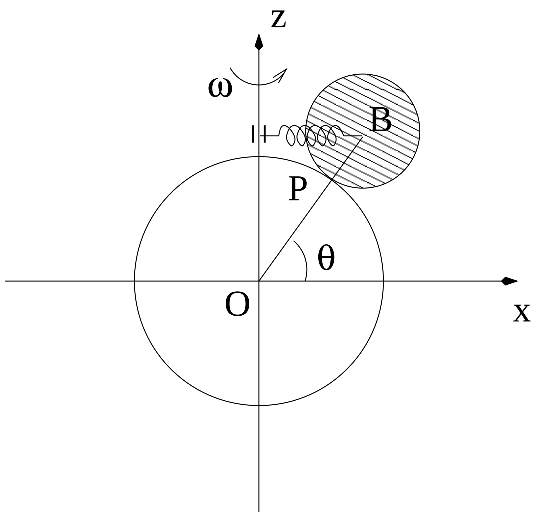
2. Trovare i valori di β per i quali tutte le traiettorie possibili sono illimitate.

3. Discutere l'esistenza di orbite circolari e far vedere che se $\beta < -2$ esiste un'unica orbita circolare il cui raggio r_c soddisfa $r_c > -2/f(\beta)$.

4. Supposto $\beta = 1$ e fissate l'energia E e la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto ℓ calcolare la distanza minima dal centro di forze che la particella può raggiungere.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse z verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio r vincolato a ruotare senza strisciare all'esterno di una guida circolare di raggio R, centrata nell'origine. Il baricentro B del disco è vincolato all'estremo di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; l'altro estremo della molla è vincolato a scorrere sull'asse z in modo che la molla si mantenga sempre parallela all'asse x (vedi figura). Il piano del moto viene fatto ruotare attorno all'asse z con velocità angolare costante $\omega\hat{\mathbf{z}}$.



Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il segmento OB forma con l'asse x

a) calcolare la velocità angolare del disco;

b) scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione di Lagrange;

c) trovare i punti di equilibrio nel sistema ruotante e discuterne la stabilità.

Si supponga adesso che il piano xz non ruoti ($\omega = 0$), ma che sia la guida circolare a ruotare attorno all'asse ortogonale al piano del moto con velocità angolare costante $\Omega\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}$. Scrivere la lagrangiana del sistema.