CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

15 Novembre 2007

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto di equilibrio;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = f(y) \\ \dot{y} = -x - \gamma\, f(y) \end{cases} \qquad \text{con } f(y) = y(2y^2 - 1)\,, \quad \gamma > 0\,,$$

1) trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabiità;

2) trovare le direzioni delle tangenti alle separatrici dei punti di sella e mostrare come cambiano al variare di γ;

3) per ciascuno dei punti di equilibrio asintoticamente stabili descrivere esplicitamente un aperto contenuto nel suo bacino di attrazione (*suggerimento*: cercare un integrale primo del sistema con $\gamma = 0$ della forma $H(x, y) = F(x) + G(y)$);

4) fare un disegno qualitativo delle separatrici dei punti di sella ed indicare i bacini di attrazione dei pozzi per γ piccolo.