# CORSO DI SISTEMI DINAMICI
# COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

9 Gennaio 2008

**Esercizio 1:** Dato il sistema newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - x^2 - \gamma\frac{dx}{dt}\,,$$

dove $\gamma > 0$,
a) lo si discretizzi in modo conservativo con passo $h$, usando l'approssimazione

$$\Delta_0^2 \simeq h^2 D^2 \quad , \quad \Delta_- \simeq hD$$

e la variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.
b) fissato $h = 1$, si trovi l'intervallo $(0, \gamma_1)$ massimale di valori di $\gamma$ in cui le proprietà di stabilità dei punti fissi del sistema discretizzato sono le stesse dei punti di equilibrio del sistema continuo.

**Esercizio 2:** Si consideri la hamiltoniana

$$H(p, q) = p^2 \cos^4 q + V_\alpha(\tan q)\,,$$

con $V_\alpha(x) = -\alpha \sin x + \sin^2 x$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 2\}$.

1) Si completi la relazione $z = \tan q$ ad una trasformazione canonica $(p, q) \mapsto (w, z)$ in modo che la hamiltoniana nelle nuove variabili sia

$$K(w, z) = w^2 + V_\alpha(z)\,;$$

2) si trovi una funzione generatrice per tale trasformazione;

3) si studino le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili: in particolare si trovino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità al variare del parametro $\alpha$ e si tracci il diagramma di biforcazione degli equilibri.