# CORSO DI SISTEMI DINAMICI
# COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

28 Gennaio 2008

**Esercizio 1:** Si studi il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x\dfrac{\sin r}{r} - y(1+r) \\ \dot{y} = y\dfrac{\sin r}{r} + x(1+r) \end{cases}$$

con $r = \sqrt{x^2+y^2}$. In particolare si descrivano gli insiemi $\alpha$ e $\omega$ limite di tutte le orbite e si tracci il ritratto di fase del sistema.

*Suggerimento:* si scriva il corrispondente sistema dinamico per le coordinate polari $r, \theta$, definite dalle relazioni $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

**Esercizio 2:** Dato il sistema dinamico discreto in $\mathbf{R}^2$

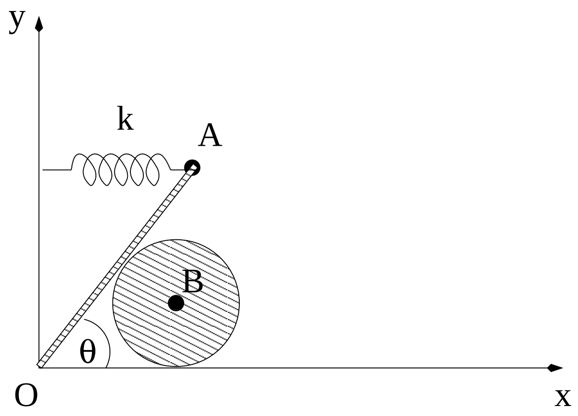
$$X_{k+1} = A\,X_k\,; \qquad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

con $x_0, y_0$ parametri reali assegnati, se ne trovi la soluzione generale.
Che relazione ha questo sistema con l'equazione alle differenze finite che definisce la successione di Fibonacci?

**Esercizio 3:**
In un piano verticale con coordinate $x, y$ (l'asse $y$ è verticale) si consideri il sistema meccanico costituito da due corpi puntiformi di ugual massa $m$ situati nei punti $A$ e $B$ rispettivamente. Il punto $A$ è l'estremo di un'asta di lunghezza $\ell$ e massa trascurabile, libera di ruotare nel piano con l'altro estremo fissato nell'origine; tale punto è inoltre collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e l'altro estremo della molla è libero di scorrere sull'asse $y$. Il punto $B$ è al centro di un disco di raggio $R$ e massa trascurabile. Il disco è imprigionato tra l'asta e l'asse $x$. Inoltre i corpi puntiformi sono soggetti ad un'accelerazione di gravità di intensità $g$.
Usando come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta$ tra l'asse $x$ e l'asta, con $0 < a < \theta < \pi$ ($a$ è il valore per cui il disco perde il contatto con l'asta),




a) si scrivano l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;

b) si scriva la hamiltoniana e si trovino i punti di equilibrio in funzione dei parametri $m, g, k, \ell, R$;

c) si determini la stabilità dei punti di equilibrio;

d) si tracci il diagramma di biforcazione degli equilibri in funzione del parametro $J = \frac{mg}{k\ell}$;

e) si spieghi l'effetto del parametro $R/\ell$ sul diagramma di biforcazione.