CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

9 Giugno 2008

Esercizio 1: Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} &= -4x(x^2-1) \\ \dot{y} &= -4y(y^2-1) \end{cases},$$

a) dimostrare che è un sistema gradiente e calcolare una funzione potenziale;
b) trovare tutti i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
c) descrivere i bacini di attrazione degli equilibri.

Esercizio 2:
In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale P di massa m vincolato a scorrere su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine; il punto P è collegato ad un punto fisso Q di coordinate $(x, y) = (0, d)$, con $d > 0$, da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, di intensità g.
a) Usando come parametro lagrangiano l'angolo θ che la retta congiungente O e P forma con la direzione verticale scrivere la lagrangiana del sistema;
b) si scrivano la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton;
c) si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare dei parametri m, g, R, k, d.
d) per i valori dei parametri che rendono costante l'energia potenziale calcolare la reazione vincolare sul punto P in funzione della coordinata θ e della condizione iniziale $\dot{\theta}_0 = \omega$.

Esercizio 3: Si consideri il sistema dinamico discreto in $\mathbf{R}^4$ definito da $X_{k+1} = AX_k$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare gli insiemi α ed ω limite di ogni orbita.