CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

2 Luglio 2008

Esercizio 1: Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\,(r-1)\,(r-2) - y \\ \dot{y} &= y\,(r-1)(r-2) + x \end{cases},$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
a) Trovare i punti di equilibrio,
b) dimostrare che esistono due orbite periodiche,
c) descrivere gli insiemi α-limite e ω-limite di tutte le orbite.

Esercizio 2: Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse z verticale ascendente. Sia dato un sistema rotante attorno all'asse z, con velocità angolare ω, costituito da un punto materiale di massa m vincolato alla circonferenza di raggio R che a $t = 0$ sta sul piano $y = 0$ con centro in $x = R, z = 0$. Sul sistema agisce l'accelerazione di gravità di intensità g e una forza elastica di costante $k > 0$ che attrae verso l'origine. Si supponga che valga la relazione $\omega^2 = k/m$.
a) Usando come parametro lagrangiano l'angolo θ che la retta congiungente il centro della circonferenza e P forma con la direzione verticale scrivere la lagrangiana del sistema;
b) si scrivano la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton;
c) si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare dei parametri m, g, R, k.

Esercizio 3: Si consideri il sistema dinamico discreto in $\mathbf{R}^3$ definito da $X_{k+1} = AX_k$, con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la soluzione generale.
b) Determinare se l'origine è un punto fisso stabile, instabile, attrattivo, asintoticamente stabile.