CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

11 Settembre 2008

Esercizio 1: Si consideri il sistema gradiente

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) \quad , \quad \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$$

con potenziale

$$U(x,y) = -\int_0^x \left[e^{s^2+y^2-1} - 1\right] ds \ .$$

Si trovino tutti i punti di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.

Esercizio 2: Si consideri il sistema newtoniano con dissipazione, di equazione

$$\ddot{x} = \log\left(\frac{3}{4} + x^2\right) - \gamma\dot{x} \, , \qquad \gamma > 0.$$

a) Trasformare il sistema in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro

$$D^2x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2} \quad , \quad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h} \, ,$$

e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile

$$y_k = x_k - x_{k-1};$$

b) determinare i valori di h, γ per cui il punto di equilibrio instabile del sistema dinamico continuo è un punto iperbolico del sistema discretizzato;
c) determinare i valori di h, γ per cui il punto di equilibrio asintoticamente stabile del sistema dinamico continuo è un punto fisso asintoticamente stabile del sistema discretizzato.

Esercizio 3: Si trovino delle funzioni f e g in modo tale che la trasformazione

$$\begin{cases} w(p,q) = pq \\ z(p,q) = f(p) + g(q) \end{cases} \qquad p, q > 0$$

sia canonica.