Compito di Meccanica Razionale e Analitica
10 Giugno 2009

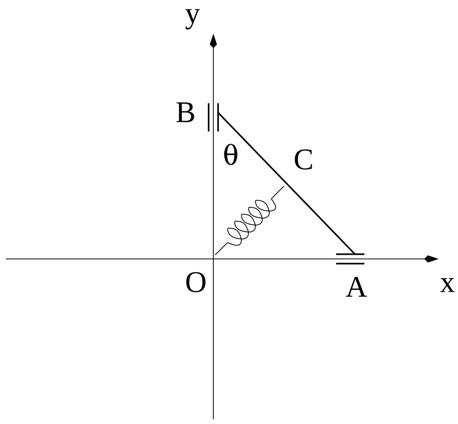
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ: l'estremo A dell'asta è vincolato a scivolare sull'asse x e l'estremo B sull'asse y (gli assi sono vincoli lisci). Sull'asta agiscono la forza di gravità, di accelerazione g, ed una forza elastica esercitata da una molla di costante k e lughezza a riposo nulla che congiunge il baricentro C dell'asta all'origine O del riferimento.

a) Utilizzando come coordinata l'angolo θ che l'asta forma con l'asse y (vedi figura) e le sole equazioni cardinali della dinamica

- scrivere l'equazione del moto del sistema;
- trovare le reazioni vincolari $\Phi_A\hat{\mathbf{y}}$ e $\Phi_B\hat{\mathbf{x}}$ che gli assi esercitano sulla sbarretta come funzioni dello stato $(\theta, \dot{\theta})$ del sistema.



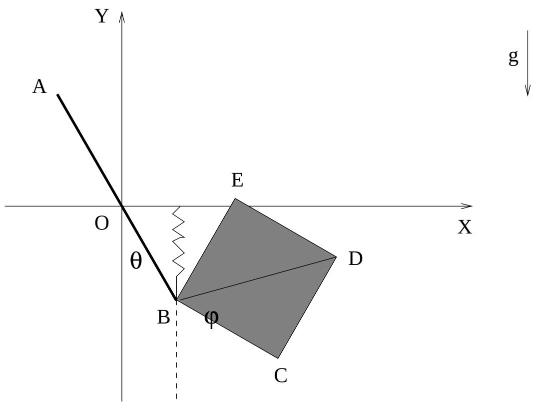
b) Al sistema precedente viene aggiunto un corpo puntiforme di massa m, saldato all'estremo B dell'asta. Scrivere l'equazione di moto del nuovo sistema con le equazioni cardinali.

Secondo Esercizio

In un piano verticale OXY è mobile il sistema composto da

- un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2\,l$, avente il punto medio fisso nell'origine del sistema di riferimento,
- una lamina quadrata omogenea BCDE di massa m e lato l, incernierata nel punto B all'asta,
- una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il punto B con la sua proiezione sull'asse X.

Si assumano come coordinate lagrangiane l'angolo θ (misurato in senso antiorario) che l'asta AB forma con la direzione negativa dell'asse Y e l'angolo φ (misurato in senso antiorario) che la diagonale BD della lamina forma con la direzione negativa dell'asse Y



a) Scrivere la lagrangiana del sistema.

b) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \frac{m\,g}{k\,l}$.

c) Scrivere l'equazione secolare per le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile quando $\alpha = \frac{1}{2}$.