Compito parziale di Meccanica Razionale e Analitica
28 Maggio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato alla superficie parametrica definita da

$$x = A\cos\delta\cos\alpha\,, \quad y = A\cos\delta\sin\alpha\,, \quad z = B\sin\delta\,,$$

con $\alpha \in S^1, \delta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ ed A, B $(A \neq B)$ due numeri positivi. Si assuma che sul punto non agiscano forze attive e che la superficie sia liscia.

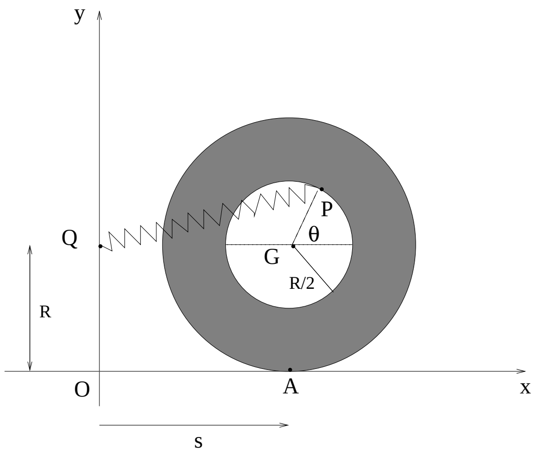
i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) usare il metodo di Routh per ridurre il problema ad un solo grado di libertà e descrivere le soluzioni del problema ridotto;

iii) utilizzando il punto precedente descrivere i moti del punto P sulla superficie al variare delle condizioni iniziali.

Secondo Esercizio

In un piano verticale Oxy una corona circolare omogenea $\mathcal{C}$, di centro G, massa m, raggio esterno R e raggio interno $R/2$, è vincolata a rotolare senza strisciare sull'asse delle ascisse Ox. Un punto materiale P, di massa m, può scorrere senza attrito lungo il bordo interno della corona ed è connesso al punto $Q \equiv (0, R)$ da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $-g\hat{\mathbf{y}}$ ($\hat{\mathbf{y}}$ è il versore dell'asse Oy). Si assumano come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto A della corona circolare con l'asse delle ascisse e l'angolo θ (misurato in senso antiorario) che il segmento PG forma con la direzione orizzontale.



a) Scrivere l'energia cinetica del sistema.

b) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \frac{k\,R}{m\,g}$.

c) Scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile quando $\alpha = 1$.