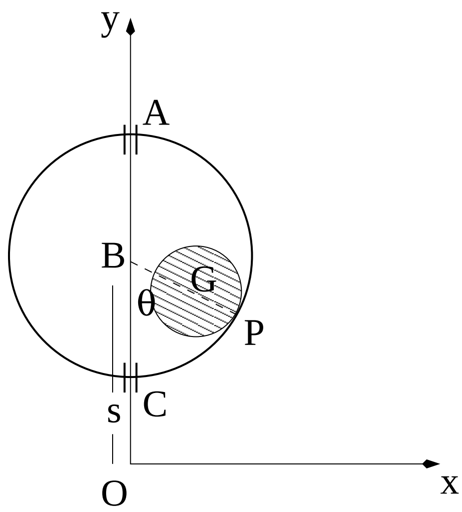
Compito di Meccanica Razionale e Analitica
4 Settembre 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio



Si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano formato da una guida anulare omogenea di massa m_A e raggio R e da un disco omogeneo di massa m_D e raggio $r < R$. L'anello può muoversi di moto traslatorio rispetto a Oxy, mantenendo il suo centro B sull'asse Oy, ed il disco può rotolare senza strisciare all'interno dell'anello. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g, e le reazioni vincolari sviluppate dall'asse Oy sull'anello nei suoi punti A, C sono normali all'asse stesso.

a) Scrivere le equazioni di Lagrange utilizzando come variabili l'ordinata s del punto B e l'angolo θ che il segmento BO forma con BP, dove P è il punto di contatto tra disco e anello;

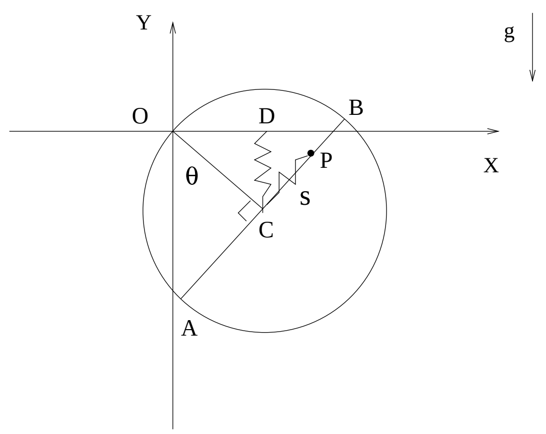
b) ritrovare le equazioni del punto a) usando le equazioni cardinali della dinamica.

Secondo Esercizio

In un piano verticale OXY è mobile il sistema composto da:

- un'anello circolare omogeneo γ di massa m e raggio R, avente un punto fisso in O, ed in grado di ruotare attorno ad un asse passante per O e ortogonale al piano dell'anello;
- un punto P di massa m libero di muoversi su un diametro AB dell'anello perpendicolare al raggio CO, dove C è il centro dell'anello;
- una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il centro C dell'anello con la sua proiezione D sull'asse X;
- una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il centro C dell'anello con il punto P.

Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $-g\,\hat{y}$ ($\hat{y}$ è il versore dell'asse Y). Si assumano come coordinate lagrangiane l'angolo θ (misurato in senso antiorario) che il raggio CO forma con la direzione negativa dell'asse Y e l'ascissa s del punto P sul raggio AB.



a) Scrivere l'energia cinetica del sistema.

b) Studiare le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.