Compito di Meccanica Razionale e Analitica
9 Luglio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

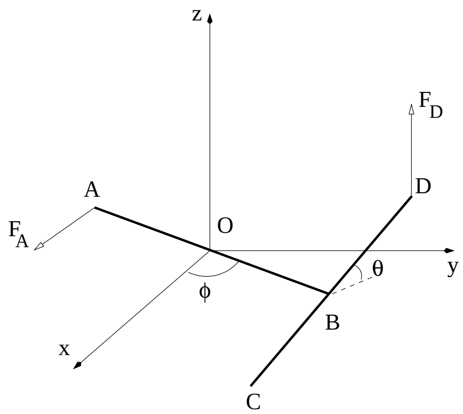
Primo Esercizio

a) Si consideri un corpo rigido formato da 8 punti materiali di uguale massa, vincolati a stare ai vertici di un cubo. Si dimostri che ogni asse passante per il baricentro è asse principale di inerzia.

b) Cosa si può dire, a riguardo, nel caso di 4 punti materiali di massa uguale, vincolati rigidamente ai vertici di un tetraedro?

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee di lunghezza 2ℓ e di massa m. La prima asta, di estremi A, B, è vincolata a ruotare nel piano Oxy mantenendo il baricentro nell'origine O; la seconda asta, di estremi C, D, è vincolata a muoversi mantenendosi ortogonale ad AB, con il baricentro incernierato in B. Sul sistema agiscono la forza di gravità, di accelerazione $-g\hat{\mathbf{z}}$, e due forze costanti $F_A\hat{\mathbf{x}}$, $F_D\hat{\mathbf{z}}$ ($F_A, F_D > 0$), applicate rispettivamente nei punti A, D ($\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ sono i versori degli assi Ox e Oz). I vincoli sono ideali.



Usando come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ che AB forma con l'asse Ox e l'angolo θ che CD forma con il piano Oxy (vedi figura)

1) scrivere la lagrangiana del sistema;

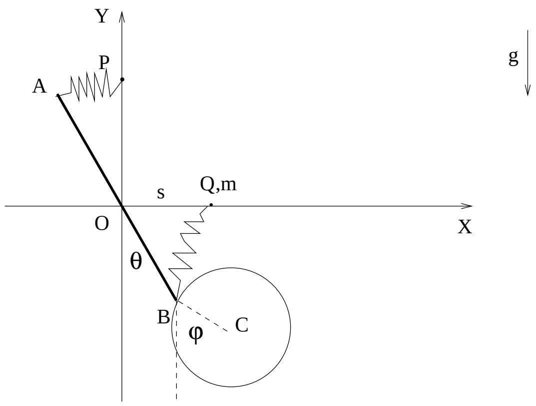
2) trovare le posizioni di equilibrio e determinarne la stabilità.

Terzo Esercizio

In un piano verticale OXY è mobile il sistema composto da

- un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $4\,l$, avente il punto medio fisso nell'origine del sistema di riferimento,
- un anello circolare omogeneo di massa m e raggio l, incernierato all'asta nel punto B,
- una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il punto A con il punto P di coordinate $(0, 2l)$.
- un punto Q di massa m mobile sull'asse X e collegato con una molla di costante elastica k al punto B.

Si assumano come coordinate lagrangiane l'angolo θ (misurato in senso antiorario) che l'asta AB forma con la direzione negativa dell'asse Y, l'angolo φ (misurato in senso antiorario) che un raggio dell'anello forma con la direzione negativa dell'asse Y e l'ascissa s del punto Q.



a) Scrivere l'energia cinetica del sistema.

b) Calcolare le posizioni di equilibrio.

c) Dimostrare che la posizione $(\theta, \varphi, s) = (0, 0, 0)$ è di equilibrio stabile.