CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

21 Novembre 2008

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto di equilibrio;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 0)$ al tempo $t = 0$.

Esercizio 2: Dato il sistema newtoniano con dissipazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x\,\sinh(x^2 - 1) - \gamma\frac{dx}{dt}$$

con $\gamma > 0$

a) trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;

b) fare un disegno qualitativo delle separatrici;

c) descrivere il bacino di attrazione di ciascun punto di equilibrio.

Esercizio 3: Sia dato il sistema dinamico continuo in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x\,(1-y^2) \\ \dot{y} &= -y\,(1-z^2) \\ \dot{z} &= -z\,(1-x^2) \end{cases} .$$

a) È un sistema gradiente?

b) Trovare tutti i punti di equilibrio, dimostrare che l'origine è asintoticamente stabile.

c) Dimostrare che i piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e le diagonali $x = \pm y = \pm z$ sono insiemi invarianti.

d) Dimostrare che in ciascuno dei piani coordinati, per esempio $x = 0$, tutte le soluzioni hanno come ω-limite l'origine.

e) Dimostrare che la palla aperta di raggio 1 è contenuta nel bacino di attrazione dell'origine.

f) Dimostrare che tutti i punti di equilibrio diversi dall'origine sono instabili (suggerimento: usare le diagonali).