CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE N. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

12 Gennaio 2009

Esercizio 1: Dato un generico sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con hamiltoniana $H(p,q)$ di classe C^2, lo si discretizzi con passo $h > 0$ usando il metodo di Eulero, cioè con l'approssimazione $D \simeq \Delta_+/h$. Si dimostri che:

a) i punti fissi del sistema discretizzato sono i punti di equilibrio del sistema continuo;

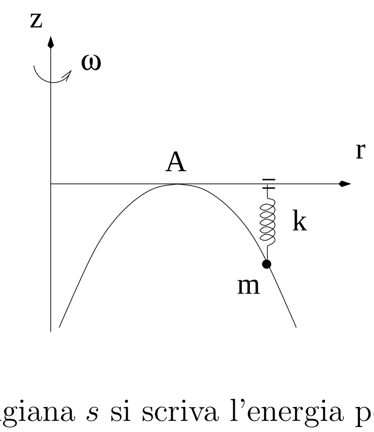
b) i punti di sella non degenere della funzione hamiltoniana sono punti fissi iperbolici per h abbastanza piccolo;

c) i punti di massimo e minimo non degenere della hamiltoniana corrispondono a punti fissi con moltiplicatori di Lyapounov > 1 per ogni h.

Esercizio 2: Si consideri un corpo puntiforme di massa m vincolato alla parabola

$$r = s + A\,; \qquad z = -s^2\,,$$

con $A > 0$, ruotante attorno all'asse z, orientato verso l'alto, con velocità angolare costante ω. Sul corpo agiscono inoltre la forza di gravità, di intensità $m\,g$, e una forza elastica proporzionale alla distanza dall'asse r, con costante elastica $k > 0$.



a) Usando la coordinata lagrangiana s si scriva l'energia potenziale e la funzione di Lagrange.

b) Descrivere tutti i punti di equilibrio, al variare del parametro A.

c) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b).

d) Disegnare il ritratto di fase nei casi qualitativamente distinti.