CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

19 Gennaio 2009

Esercizio 1: Dato il potenziale $U(x,y) = x\,(x^2+y^2-2)$ si consideri il sistema dinamico gradiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = -\nabla U(x,y) \ .$$

a) Trovarne i punti di equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.

b) Uno dei punti di equilibrio risulterà essere un pozzo nonlineare; dire quali tra i seguenti insiemi è completamente contenuto nel bacino di attrazione del pozzo: b1) l'asse x; b2) il semicerchio aperto $x^2+y^2<2, x>0$; b3) il semicerchio aperto $x^2+y^2<2, x<0$.

Esercizio 2: Data l'equazione alle differenze finite lineare

$$x_{k+3} = 2\,x_{k+2} + x_{k+1} - 2\,x_k \ :$$

a) trasformarla in sistema dinamico discreto in $\mathbf{R}^3$ con matrice dei coefficienti A;

b) dimostrare che l'origine non è stabile per $k \to +\infty$;

c) trovare tutti i punti fissi del sistema dinamico discreto;

d) trovare tutti i punti periodici di periodo due del sistema dinamico discreto.

Esercizio 3:
Si consideri un corpo puntiforme di massa m vincolato alla cubica

$$z = r^3/3 + r$$

ruotante attorno all'asse z, orientato verso l'alto, con velocità angolare costante ω. Sul corpo agisce la gravità di intensità $m\,g$.

a) Usando la coordinata lagrangiana r si scriva l'energia potenziale e la funzione di Lagrange.

b) Trovare tutti i punti di equilibrio, al variare dei parametri g, ω.

c) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b) e disegnare il diagramma di biforcazione in funzione del parametro $J = \omega^2/(2g)$.

d) Disegnare il ritratto di fase nei casi qualitativamente distinti e indicare in quali casi e dove siano presenti orbite periodiche.