CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

10 Febbraio 2009

Esercizio 1: Dato il sistema newtoniano con dissipazione dato dall'equazione del secondo ordine

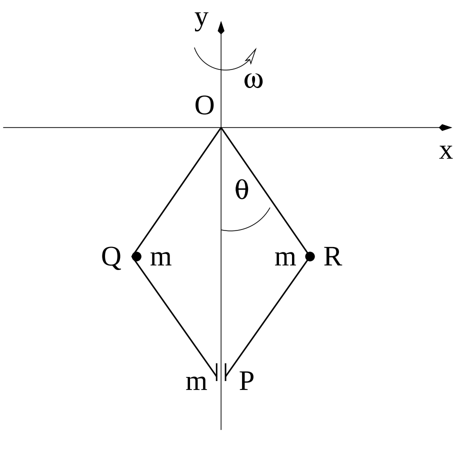
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sin x - \frac{x^2}{4\,\pi^2} - \gamma\frac{dx}{dt}$$

con $\gamma > 0$,

a) descrivere i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;

b) tracciare nel piano delle fasi le separatrici e tratteggiare i bacini di attrazione dei pozzi nel caso di piccola dissipazione ($\gamma << 1$).

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico formato da 3 punti materiali P, Q, R di massa m vincolati ad un piano verticale in cui introduciamo il riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Il punto P è vincolato a scivolare lungo l'asse y ed è collegato a Q e ad R da due sbarrette di lunghezza ℓ e massa trascurabile. I punti Q, R sono anche collegati all'origine O da altre due sbarrette uguali alle precedenti (vedi figura). Il piano è posto in rotazione attorno all'asse y con velocità costante ω. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che OQ forma con la direzione verticale:



a) scrivere la lagrangiana;

b) trovare gli equilibri e discuterne la stabilità in funzione del parametro $J = \frac{2g}{\omega^2\ell} \neq 1$;

c) tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri;

d) fare un disegno qualitativo delle soluzioni nei casi significativi.

Esercizio 3: Data l'equazione alle differenze finite lineare

$$x_{k+2} + x_{k+1} + x_k = 6 \ :$$

a) trasformarla in sistema dinamico discreto in $\mathbf{R}^2$;

b) trovare tutti i punti fissi del sistema dinamico discreto;

c) trovare quali punti fissi sono stabili per $k \to \pm\infty$;

d) trovare tutti i punti periodici del sistema dinamico discreto e il loro periodo.