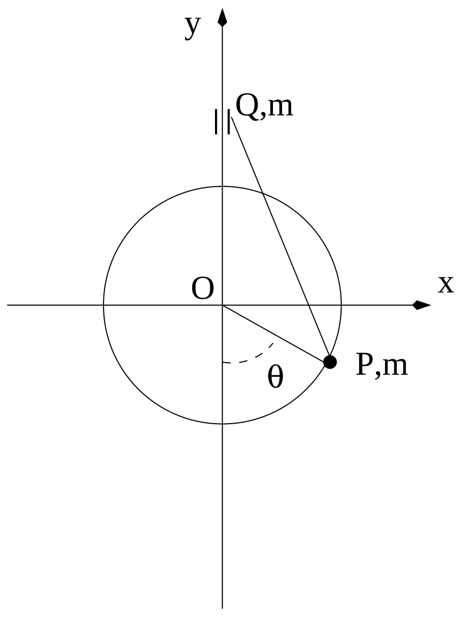
CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

3 Giugno 2009

Esercizio 1: Si consideri il sistema meccanico formato da 2 punti materiali P, Q di massa m vincolati ad un piano verticale in cui introduciamo il riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Il punto P è collegato all'origine O da una sbarretta rigida, di massa trascurabile, di lunghezza $R > 0$. Il punto Q è vincolato a scivolare lungo l'asse y ed è collegato a P da una sbarretta rigida di lunghezza kR e massa trascurabile; assumiamo $k > 1$ (vedi figura). Sui due punti materiali agisce una forza di gravità di intensità $g > 0$ rivolta nel verso negativo dell'asse y. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che OP forma con il verso negativo dell' asse y:



a) scrivere la lagrangiana;

b) trovare gli equilibri e discuterne la stabilità; discutere la dipendenza dai parametri m, g, k

c) fare un disegno qualitativo delle soluzioni;

d) Domanda facoltativa: discutere cosa succede al limite per $k \longrightarrow 1^+$.

Esercizio 2: Sia dato il sistema newtoniano ad un grado di libertà definito dall'energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{-x^4 + x^2 - 4}$$

con dissipazione $\gamma > 0$.

a) Scrivere l'equazione del sistema e trovare i punti di equilibrio;

b) discutere la stabilità dei punti di equilibrio;

c) fare un disegno qualitativo delle soluzioni nel caso conservativo $\gamma = 0$;

d) fare un disegno qualitativo che descriva l'andamento per $t \geq 0$ delle soluzioni nel caso dissipativo, per γ piccolo e per condizioni iniziali corrispondenti ad energia $E \leq 0$.

Esercizio 3: Dato lo stesso sistema dinamico newtoniano dell'esercizio 2, considerato per $\gamma > 0$ ma piccolo:

a) Discretizzare il sistema dinamico in modo conservativo con passo $h > 0$;

b) trovare i punti fissi del sistema dinamico discreto così ottenuto, determinarne la stabilità del linearizzato;

c) per ciascuno dei punti fissi, quali conclusioni si possono trarre sulla stabilità in base ai risultati del punto b?

d) Domanda facoltativa: come cambierebbero le conclusioni dei punti b e c nel caso $\gamma = 0$?