CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

14 Settembre 2009

Esercizio 1: Data l'equazione alle differenze finite del terzo ordine:

$$x_{k+1} = x_k - x_{k-1} + x_{k-2}$$

a) scrivere il sistema dinamico discreto corrispondente su $\mathbf{R}^3$;

b) trovare i moltiplicatori di Lyapounov e discutere la stabilità dell'origine;

c) trovare il valore della soluzione particolare con condizioni iniziali $(-1, 1, 0)$ per $k = 10$.

Esercizio 2: Dato il sistema newtoniano con dissipazione

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} + \frac{k}{r^2} - \gamma\frac{dr}{dt}$$

con $k < 0$, si esamini prima il caso conservativo $\gamma = 0$:

a) fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano $(r, dr/dt)$, in particolare indicando le separatrici;

b) trovare gli asintoti delle curve di livello dell'energia $E(r, \dot{r})$ per $r \to \pm\infty$.

Quindi si esamini il caso con $\gamma > 0$, supposto piccolo:

c) trovare i punti di equilibrio del corrispondente sistema dinamico e discuterne la stabilità; indicare esplicitamente un aperto contenuto nel bacino di attrazione di ogni pozzo;

d) dimostrare che la funzione energia $E(r, \dot{r})$ tende ad un limite finito per $t \to +\infty$, per qualsiasi condizione iniziale;

e) dimostrare che il limite dell'energia del punto d) può assumere soltanto due valori.

Esercizio 3: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su una parabola di equazione $z = x^2 - 1$ in un piano verticale (x, z).
Supponiamo che il corpo sia soggetto a un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità g, e alla forza di richiamo di una molla di costante elastica k con estremo libero di scorrere sull'asse x.

a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, k;
c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano (J, x) con $J = mg/k$.
d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei casi principali.

SOLUZIONI

a) Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 \left[1 + 4\, x^2\right] \ .$$

Energia potenziale:

$$V = \left(m\, g\, + \frac{k}{2} z\right) z = (x^2 - 1)\left(m\, g\, + \frac{k}{2}(x^2 - 1)\right)$$

Lagrangiana: $L = T - V$.
Il momento coniugato ad x è

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\, \dot{x}(1 + 4\, x^2)$$

e l'equazione di Lagrange

$$m\, \ddot{x}(1 + 4\, x^2) + 4\, m\, x \dot{x}^2 = -V'(x)$$

dove

$$V'(x) = 2\, x\, \big(m\, g + k(x^2 - 1)\big)$$

b) Formalismo hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m\,(1 + 4\, x^2)} + V(x)$$

$$\begin{cases} \dot{p} & = & \dfrac{4\, x\, p^2}{m\,(1 + 4\, x^2)^2} - V'(x) \\ \dot{x} & = & \dfrac{p}{m\,(1 + 4\, x^2)} \end{cases}$$

Punti di equilibrio $p = 0$ e $x = x_1 = 0$ oppure

$$x = x_{2,3} = \pm\sqrt{1 - \frac{mg}{k}}$$

se $mg/k < 1$.
c) Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio considero lo jacobiano del campo vettoriale hamiltoniano per $p = 0$:

$$A(x) := \left.\frac{\partial(\dot{p}, \dot{x})}{\partial(p, x)}\right|_{p=0} = \begin{pmatrix} 0 & -V''(x) \\ \dfrac{1}{m\ (1 + 4\, x^2)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2(m\, g - k) \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} ; \qquad A(x_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & -4\, k\, x_{2,3}^2 \\ \dfrac{1}{m\ \left(1 + 4\, x_{2,3}^2\right)} & 0 \end{pmatrix} ;$$

quindi, posto $J = mg/k$, $det(A(0)) = 2(J - 1)k/m$ ed il punto $(0, 0)$ è instabile se $J < 1$ ed è stabile se $J > 1$.
Inoltre $det(A(x_{2,3})) > 0$, quindi i punti di equilibrio $(0, x_{2,3})$ sono stabili.

e) Lavorando direttamente nel sistema rotante, con coordinate (x, z) l'energia potenziale totale, tenendo conto anche della forza apparente centrifuga, è:

$$V = \left(m\,g + \frac{k}{2} z \right) z - \frac{1}{2}\omega^2 m x^2 = (x^2 - 1)\left(m\,g + \frac{k}{2}(x^2 - 1) \right) - \frac{1}{2}\omega^2 m x^2$$

e l'energia cinetica ha semplicemente la stessa espressione di prima.
I punti di equilibrio sono $p = 0$ e $x = x_1 = 0$ oppure

$$x = x_{2,3} = \pm\sqrt{1 - \frac{2m\,g - m\,\omega^2}{2k}} \qquad \left(\text{se } \frac{2m\,g - m\,\omega^2}{2k} < 1 \right) .$$

Usando come parametro di biforcazione $J = \frac{2m\,g - m\,\omega^2}{2k}$ vale la stessa discussione sulla stabilità fatta nel caso non ruotante. L'unica differenza sta nel fatto che J in questo caso può essere negativo.