# Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
# 8 Gennaio 2010

**(usare fogli diversi per esercizi diversi)**

### Primo Esercizio

**Esercizio 1:** Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri un punto materiale $P$, di massa $m$, vincolato alla superficie parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x &= r(z)\cos\lambda \\ y &= r(z)\sin\lambda \qquad \text{dove} \ \ r(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^2 + 1}\,, \\ z &= z \end{cases}$$

con $z \in \mathbb{R}$, $\lambda \in S^1$. Il punto materiale non è soggetto a forze attive, ma solo alla reazione vincolare. Utilizzando come coordinate $(z, \lambda)$

A) si scriva la lagrangiana del sistema;

B) si scriva la hamiltoniana del sistema e si trovino gli integrali primi del sistema hamiltoniano corrispondente;

C) si riduca il numero di gradi di libertà del problema utilizzando il fatto che una variabile è ciclica e si trovino gli equilibri del problema ridotto;

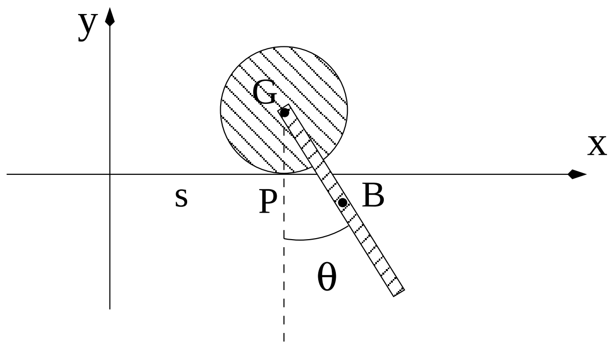
D) si scrivano le formule di quadratura che determinano le leggi orarie per le variabili $z$ e $\lambda$. Si mostri che $\dot\lambda$ non si annulla mai salvo che per le soluzioni in cui $\lambda$ è costante;

E) si descrivano qualitativamente le traiettorie delle soluzioni nello spazio delle configurazioni in funzione dei valori degli integrali primi, in particolare indicando quali sono limitate e quali corrispondono ad orbite periodiche;

F) si determinino i valori degli integrali primi per cui valgono le ipotesi del teorema di Liouville-Arnold. In particolare si trovino i valori degli integrali per cui si ottengono dei tori invarianti.

**Secondo Esercizio**

Si consideri il sistema piano costituito da un disco omogeneo di massa $M$ e raggio $R$ e da un'asta omogenea di massa $m$ e lunghezza $2\ell$ vincolata per un estremo al baricentro $B$ del disco. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse $x$. Denotiamo inoltre con $B$ il baricentro dell'asta (vedi figura).




Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa $s$ del punto di contatto $P$ tra il disco e l'asse $x$, e l'angolo $\theta$ tra l'asta e la direzione verticale,

A) scrivere le equazioni di Hamilton del sistema;

B) mostrare che le coordinate $s, \theta$ separano l'equazione di Hamilton-Jacobi in due equazioni differenziali ordinarie;

C) mostrare che le due equazioni differenziali ordinarie del punto B) possono sempre essere portate in forma normale, con una singolarità dove $\dot{\theta} = 0$.