CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

17 Novembre 2009

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\dot{X} = A\,X \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) se ne calcolino gli esponenti di Lyapounov, e si discuta la stabilità dell'origine;

b) si trovi un sottospazio lineare reale di dimensione 1 invariante;

c) si trovi un sottospazio lineare reale di dimensione 2 invariante.

Esercizio 2: Data la funzione energia potenziale $V(x) = x^5 - 2\,x^3 + x$, si consideri il sistema newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \gamma\frac{dx}{dt}$$

si esamini prima il caso conservativo $\gamma = 0$:

a) si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;

b) fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano $(x, dx/dt)$, in particolare indicando le separatrici.

Quindi si esamini il caso con $\gamma > 0$, supposto piccolo:

c) trovare i punti di equilibrio del corrispondente sistema dinamico e discuterne la stabilità;

d) fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano $(x, dx/dt)$, in particolare indicando le separatrici;

e) si disegni la soluzione con condizioni iniziali $(0, 0)$.

Esercizio 3: Si consideri il sistema gradiente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & -U_x \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -U_y \end{array} \right. \quad , \quad U(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(1 - xy)$$

a) si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;

b) si determinino i bacini di attrazione dei pozzi (suggerimento: si cerchino delle rette invarianti).