CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

8 Gennaio 2010

Esercizio 1:
In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento Oxz, con asse z verticale ascendente. Si consideri un pendolo formato da un punto materiale di massa m attaccato ad un estremo di una sbarretta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'altro estremo della sbarretta è incernierato al punto di coordinate $(d, 0)$, con $d > 0$. Il piano verticale viene fatto ruotare attorno all'asse z con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g. Usando come coordinata l'angolo θ tra la sbarretta e la direzione verticale

a) scrivere la lagrangiana del sistema;

b) descrivere gli equilibri relativi del sistema e studiarne la stabilità;

c) disegnare il ritratto in fase del sistema nei casi qualitativamente differenti.

Esercizio 2:
Si consideri il sistema newtoniano con dissipazione

$$\ddot{x} = -\omega - \cos x - \gamma\dot{x}\,, \qquad \omega, \gamma > 0.$$

a) Si trasformi il sistema in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro
$$D^2x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2}\,, \qquad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h},$$
e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.

b) Si trovino delle condizioni su ω, γ, h che siano necessarie e sufficienti affinché i punti di equilibrio instabili del sistema continuo siano punti fissi iperbolici del sistema discreto.

c) Si trovino delle condizioni su ω, γ, h che siano necessarie e sufficienti affinché i punti di equilibrio asintoticamente stabili del sistema continuo siano punti fissi con moltiplicatori di Lyapounov < 1.

Esercizio 3:
a) Si completi ad una trasformazione canonica $(p, q) \to (w, z)$, con $p+q \in (-\pi/2, \pi/2)$, la relazione

$$w = \sin(p + q) \ .$$

b) Si usi la trasformazione canonica del punto a) per risolvere il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\left[\sin^2(p + q) - \frac{q^2}{\cos^2(p + q)}\right]$$

e con condizioni iniziali date $p(0) = p_0, q(0) = q_0$.