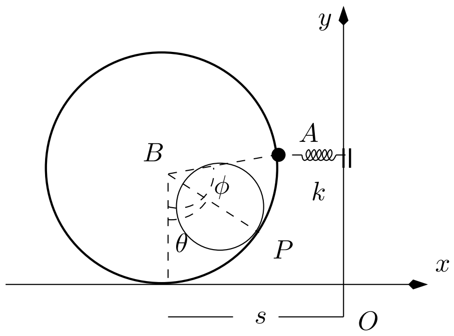
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
10 Giugno 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un anello omogeneo di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. All'interno dell'anello può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio $r < R$ ed un punto materiale A, di ugual massa m, può scorrere sull'anello. Al punto A è attaccato un estremo di una molla di costante elastica k; l'altro estremo della molla può scorrere sull'asse Oy. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Detto P il punto di contatto tra disco e anello, si usino come coordinate l'ascissa s del centro B dell'anello e gli angoli θ, ϕ che i segmenti BP, BA formano rispettivamente con la direzione verticale.



(i) Scrivere la lagrangiana del sistema.

(ii) Assumendo $mg = kR$ trovare gli equilibri e determinarne la stabilità.

Secondo Esercizio

Si consideri in $\mathbb{R}^{2n}$ il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{p} \cdot A^{-1}\mathbf{p} + \mathbf{q} \cdot B\mathbf{q}\right] , \qquad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici simmetriche di ordine n, costanti e definite positive.

Dimostrare che esiste una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

tale che le nuove variabili $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi.[1]

[1] *Suggerimento:* usare la diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche.