Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Luglio 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da una lamina quadrata omogenea, di massa m e lato ℓ. Il lato AB della lamina è vincolato a scivolare su una guida rettilinea r che può ruotare attono all'origine O mantenendosi sempre nel piano Oxy. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g, e la forza di una molla di costante elastica k che congiunge il punto A della lamina all'origine O.

Usando come coordinate l'ascissa s del punto medio di AB su r, l'angolo ϕ che r forma con l'asse Ox e l'angolo ψ che il piano della lamina forma con il piano Oxy

i) si determini l'asse istantaneo di rotazione della lamina;

ii) si scriva la lagrangiana del sistema.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo ABC, con angolo retto in A e angolo α in B, il cui lato AB scivola sull'asse Ox con legge oraria $A(t) \equiv (s(t), 0)$, dove $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio R. Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa q del punto di contatto P tra disco e triangolo sul lato BC del triangolo

i) scrivere la lagrangiana L del disco relativa al sistema di riferimento Oxz e la lagrangiana $\mathcal{L}$ relativa a un sistema solidale al triangolo;

ii) trovare una funzione $F(q, t)$ tale che

$$L = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}F.$$

Terzo Esercizio

Nel piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da n punti materiali $P_1 \dots P_n$ di ugual massa m. Il punto P_i è vincolato a muoversi sulla retta $x = i$, $i = 1 \dots n$. Inoltre ogni P_i è collegato ai punti P_{i-1} e P_{i+1} da due molle di costante elastica k (con $P_0 \equiv (0, 0), P_{n+1} \equiv (n + 1, 0)$). Si usino come coordinate i valori $y_i, i = 1 \dots n$ delle ordinate dei punti P_i.

i) Scrivere energia cinetica e potenziale del sistema;

ii) dimostrare che l'unica configurazione di equilibrio è $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$;

iii) dimostrare che l'equilibrio trovato in ii) è stabile.