Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Giugno 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 1, formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ. L'estremo B dell'asta può scorrere sull'asse Ox e l'altro estremo A può scorrere su un circonferenza di raggio $r < \ell$ centrata nell'origine.

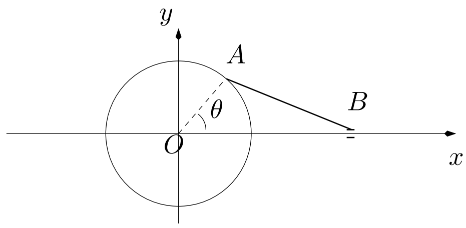

Figura 1

Usando come coordinata l'angolo θ che OA forma con l'asse Ox

(i) calcolare la velocità angolare dell'asta;

(ii) trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 2, composto da un disco omogeneo di massa m e raggio r. Il disco rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine e giacente nel piano Oxy. Inoltre la retta tangente al disco nel punto di contatto P con la guida corrisponde alla tangente alla guida nello stesso punto.

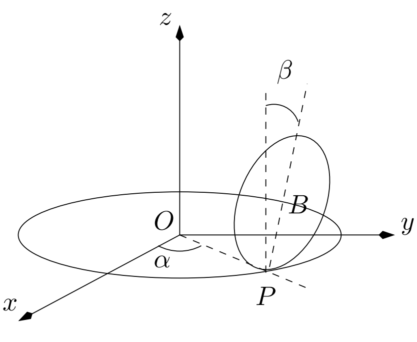

Figura 2

Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g. Detto B il baricentro del disco, si usino come coordinate l'angolo α tra OP ed Ox e l'angolo β tra PB ed Oz.

(i) Calcolare la velocità angolare del disco;[1]

(ii) scrivere la lagrangiana del sistema.

[1] *Suggerimento:* usare un sistema di riferimento in cui il moto del disco è piano.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}\cdot\Lambda\mathbf{q}\right) , \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\omega_1^2,\ldots,\omega_n^2) ,$$

con $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ed $\omega_h > 0$ $(h = 1\ldots n)$. Trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (\mathbf{I},\boldsymbol{\phi}) = \Psi(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

tale che la funzione di Hamilton del nuovo sistema hamiltoniano sia

$$K(\mathbf{I}) = \mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} ,$$

con $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$.