Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

8 Settembre 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento inerziale $\Sigma = Oxyz$. Un punto materiale P di massa m può muoversi su una superficie sferica liscia $\mathcal{S}$ di raggio R che ruota attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$. Si consideri il riferimento $\Sigma' = Ox'y'z'$, solidale a $\mathcal{S}$, con $Oz' \equiv Oz$. Trascurando la forza di gravità si studi il moto di P nel riferimento Σ' usando le coordinate $(\theta, \phi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times S^1$ definite da

$$x' = R\cos\theta\cos\phi\,, \quad y' = R\cos\theta\sin\phi\,, \quad z' = R\sin\theta\ .$$

In particolare:

i) si scriva l'espressione delle forze generalizzate Q_θ, Q_ϕ relative alle forze apparenti;

ii) si trovi l'energia potenziale generalizzata delle forze apparenti;[1]

iii) si scrivano le equazioni di Lagrange del moto del punto.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da due dischi omogenei di raggi $R, 2R$ e masse m, M rispettivamente. I dischi sono saldati l'uno sull'altro, e hanno il baricentro in comune. Il disco piccolo può rotolare senza strisciare sull'asse Ox e due molle di costante elastica k, che si mantengono sempre orizzontali, collegano due punti diametralmente opposti A, C del bordo del disco grande alle rette $x = \pm 3R$. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa s del baricentro B dei dischi ed assumendo che per $s = 0$ le ascisse dei punti A, C siano nulle

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) dimostrare che esiste un unico equilibrio in $(0, R\pi/2)$;

iii) studiare la stabilità dell'equilibrio trovato al punto ii).

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{1}{|\mathbf{q}|} - \frac{1}{\sqrt{(q_1 - \cos t)^2 + (q_2 - \sin t)^2}}$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

---

[1] si ricordi che se il punto P si muove liberamente in $\mathbb{R}^3$ l'energia potenziale della forza di Coriolis è $m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}$, con $\mathbf{q} = (x', y', z'), \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

i) Completare la relazione

$$\mathbf{Q} = R_t^{-1}\mathbf{q}\,, \qquad\qquad R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \stackrel{\Psi}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$$

e trovare una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$.

ii) Trovare una funzione di Hamilton che definisce il sistema hamiltoniano nelle variabili $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$.